مثال) اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ ماتریسی ۲×۲ باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه هایش نمایش دهید. (ص۱۱کتاب جدید)

جواب : $a_{۱۱}=a_{۲۲}=۷$ و $a_{۲۱}=۵$ و $a_{۱۲}=-۲$ پس $A=\begin{bmatrix}۷ & -۲\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}$ (کتاب چاپ ۹۸)

۱) اگر ماتریس $A=[a_{ij}]$ ماتریسی ۳×۲ باشد و داشته باشیم : $a_{ij}=\begin{cases}۲i^{۲}-j & i>j\\ ij & i=j\\ i+۲j^{۲} & i<j\end{cases}$ در این صورت ماتریس A را با درایه هایش نمایش دهید.

مثال : ماتریس های زیر همگی ماتریس های سطری هستند : $A=[۱\quad ۲]_{۱\times۱}$ و $B=[۲\quad -۱\quad ۴\quad ۵]_{۱\times۴}$ و $C=[۷]_{۱\times۱}=۷$

(کتاب چاپ ۹۸)

مثال : ماتریس های زیر همگی ماتریس های ستونی هستند : $B=\begin{bmatrix}۲\\ -۱\\ ۳\\ ۰\end{bmatrix}_{۴\times۱}$ و $A=\begin{bmatrix}۲\\ \pi\\ -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}_{۳\times۱}$ (کتاب چاپ ۹۸)

مثال) اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی $(n\times n)n$ می نامیم. ماتریس های زیر همگی مربعی هستند : $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۳ & -۱ & ۲\\ ۵ & -۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}_{۳\times۳}$ و $C=[۵]_{۱\times۱}$

در ماتریس های A و B قطرهای مشخص شده را قطر اصلی این دو ماتریس می نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایه‌ی a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارند. (کتاب چاپ ۹۸)

مثال : ماتریس های زیر همگی قطری اند. $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۷\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ (کتاب چاپ ۹۸)

مثال : ماتریس های زیر همگی اسکالر هستند : $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $C=[۲]$ (کتاب چاپ ۹۸)

۲) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

ماتریسی که تمام درایه های بالای قطر اصلی آن صفر است ماتریس بالا مثلثی نامیده می شود.

۳) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس ..... می نامیم. (۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۰/۲۵نمره)

۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید :

ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس اسکالر می نامند.

۵) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید : ماتریس صفر ماتریس مربعی است که همه درایه های آن صفر هستند.

۶) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

دو ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می گوییم هرگاه درایه های آنها ..... باشند.

مثال) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $x+y+z$ را بیابید. (ص۱۳کتاب جدید)

جواب : $A=B\Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۳ \end{cases}\Rightarrow x+y+z=۱۵$ (کتاب چاپ ۹۸)

۷) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & x^{۲}-y^{۲} \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۹ \\ ۲ & ۲۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند x و y را بیابید.

۸) دو ماتریس ۳×۲ و غیر صفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

۹) دو ماتریس ۳×۳ و غیر صفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس اسکالر باشد.

کار در کلاس : ۱) در هر حالت طرف دوم تساوی های زیر را به دست آورید. (ص۱۵کتاب جدید)

الف) $=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}\times(-۱)$ ب) $=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ پ) $=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\times ۰$ ت) $=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\times ۷$

۲) هر یک از ماتریس های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید. (ص۱۵کتاب جدید)

الف) $=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\times ۲$ ب) $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}=(-۱)\times$ (کتاب چاپ ۹۸)

۱۰) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید :

در ماتریس $A_{۳\times ۴}=[a_{ij}]$ که در آن $a_{ij}=\frac{i}{۱+j}$، در ماتریس $۳A=[b_{ij}]$ درایه $b_{۲۴}$ برابر است با .....

۱۱)اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i+j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد،مجموع درایه های ماتریس $۳A+۲I$ رابه دست آورید.

کار در کلاس : مانند نمونه ماتریس های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید. (ص۱۴کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱ \\ ۷ & ۸ & ۹ & -۱ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+(-۱) & ۲+(-۲) & ۳+(-۳) & -۱+(۱) \\ ۴+۱ & ۵+۲ & ۶+۳ & -۱+۴ \\ ۷+۵ & ۸+۶ & ۹+۷ & -۱+۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۷ & ۹ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & -۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ت) $A=\begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۷ \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\cdots$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیر صفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

۱۲)جای خالی رابا عبارت با کلمات مناسب پر کنید. $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند آن گاه $A-B=\cdots\cdot$

۱۳) اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i.j & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را به دست آورید.

(۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۱/۲۵نمره)

۱۴) فرض کنید $A=[a_{ij}]_{mn}$ و $B=[b_{ij}]_{mn}$ و $C=[c_{ij}]_{mn}$ و $r,s\in R$ باشند نشان دهید :

الف : $A+B=B+A$ ب : $r(A\pm B)=rA\pm rB$ پ : $(r\pm s)A=rA\pm sA$ ت : $(A+B)+C=A+(B+C)$

مثال : فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت نشان می دهیم که (کتاب چاپ ۹۸)

$(-۲)(A+B)=(-۲)A+(-۲)B$،

۱۵) **کار در کلاس :** برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ برقراری خاصیت زیر را تحقیق کنید.

$$(r\pm s)A=rA\pm sA$$

۲) درستی خاصیت $(r\pm s)A=rA\pm sA$ را در حالت کلی ثابت کنید. (ص۱۷کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۶) **کار در کلاس :** یک ماتریس ۳×۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱×۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

جواب : فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴\\ ۱\\ ۳\end{bmatrix}$ در این صورت $A\times B=[۰+۱+۶]=[-۷]=-۷$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۲ & ۴\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ باشد در این صورت حاصل ضرب $A\times B$ را بیابید. آیا ضرب $B\times A$ امکان پذیر است؟ چرا؟

جواب :
$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲-۲-۴ & ۳+۴-۵\\ ۶-۲+۴ & ۹+۴+۵\\ -۲+۲+۱۶ & -۳-۴+۲۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ ۸ & ۱۸\\ ۱۶ & ۱۳\end{bmatrix}$$

خیر زیرا تعداد ستون های ماتریس B با تعداد سطرهای ماتریس A برابر نیست. (ص۱۸کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\ ۶\end{bmatrix}_{۲\times ۱}$ باشد در این صورت حاصل ضرب $A\times B$ را بیابید. آیا ضرب $B\times A$ امکان پذیر است؟ چرا؟

۱۸) **کار در کلاس :** ۱) برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید. (ص۱۸کتاب جدید)

الف) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳ & -۱\\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲\\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۴}$ $\Rightarrow A\times B=\cdots$

ب) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۱\\ ۳ & ۰ & ۵\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ $\Rightarrow A\times B=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}_{۲\times ۱}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\end{bmatrix}_{۱\times ۳}$ $\Rightarrow A\times B=\cdots$

ت) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$ $\Rightarrow A\times B=\cdots$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که اگر $ab=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$ مقایسه کنید.

۲) اگر A ماتریسی ۳×۵ باشد در این صورت در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه‌ی آن را بیابید. (ص۱۹کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

الف) $B=[b_{ij}]_{۳\times ۲}$ ب) $B=[b_{ij}]_{۳\times ۵}$ پ) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۳}$ ت) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۴}$ ث) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۵}$

۱۹) یک ماتریس سطری ۳×۲ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱×۳ مانند B طوری تعریف کنید که $AB=\begin{bmatrix}۴\\ ۵\end{bmatrix}$

۲۰) اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ با درایه های $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i\neq j\\ ۲ & i=j\end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix}a & ۶\\ -۳ & b\end{bmatrix}$ و $A\times B$ ماتریس قطری باشد حاصل ab را به دست آورید.

۲۱)اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳ & a\\ ۰ & b\end{bmatrix}$ مقادیر a و b راطوری به دست آورید که حاصل ضرب AB ماتریس ماتریس اسکالر باشد.

۲۲) **کار در کلاس :** فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟ (ص۱۹کتاب جدید)

۲) ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را از چپ و از راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل ضرب ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید. (ص۱۹کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۲۳) ماتریس اسکالر $B=\begin{bmatrix}k & ۰\\ ۰ & k\end{bmatrix}$ را از چپ و از راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل ضرب ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید.

۲۴) اگر $A=\begin{bmatrix}r_۱ & ۰\\ ۰ & r_۲\end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۲×۲ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۲۵) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ..... (۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۰/۲۵نمره)

۲۶) اگر ضرب ماتریس های $A=\begin{bmatrix}x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix}x & ۲ & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۲\\ -x\end{bmatrix}$ را بیابید.

(۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۱/۵نمره)

۲۷) **کار در کلاس :** ۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}_{۳\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ را بررسی کنید.

درحالت کلی اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times p}$ و $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{p\times s}$ و $C=\lfloor c_{ij}\rfloor_{p\times s}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع پذیری یا پخشی دارد یعنی؛ $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ (ص۱۹کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۲۸) **کار در کلاس :** ۴) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}_{۳\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ را بررسی کنید.

در حالت کلی اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times p}$ و $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{p\times k}$ و $C=\lfloor c_{ij}\rfloor_{k\times n}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی؛ $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ (ص۲۰کتاب جدید)

۲۹) دو ماتریس ۲×۲ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

۳۰) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B اگر $AB=\overline{O}$ آنگاه $A=\overline{O}$ یا $B=\overline{O}$

۳۱) ماتریس های $A\neq\overline{O}$، B و C را به گونه ای مثال بزنید که $AB=AC$ باشد ولی $B\neq C$ باشد.

۳۲) درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس های متمایز A، B و C داشته باشیم، $AB=AC$ آنگاه لزوماً $B=C$ است. (۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۰/۲۵نمره)

۳۳) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید : اگر $A^{۲}=A$ باشد، $(I-A)^{۲}=I-A$

۳۴) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۲\\ ۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های سطر دوم $A^{۳}$ برابر ۵ می باشد.

ب) اگر $A^{۲}=A$ باشد در این صورت داریم : $(A+I)^{۲}=I+۳A$ (۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۱نمره)

۳۵) اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های ماتریس $A^{۱۳۹۹}$ را بیابید.

۳۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۱۳۹۹}-A^{۱۳۹۸}$ را بیابید.

۳۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}$، مطلوبست محاسبه ماتریس $A^{۱۰}$. (۱۳۸۶/۱۰/۱۶-۰/۵ نمره صبح)

۳۸) اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۱۰}$ محاسبه کنید. (۱۳۸۶/۱۰/۱۷-۰/۵ نمره تطبیقی تهران)

۳۹) اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۵}$ را بر حسب A به دست آورید.

۴۰) اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^{۳}$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۴۱) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & -a\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۱۳۹۷}$ را برحسب A بدست آورید.

۴۲) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد آنگاه ماتریس $A^{۱۳۹۹}$ را به دست آورید.

۴۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۸ & -۶ & ۶\\ ۸ & -۶ & ۴\\ ۲ & -۲ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۴}$ را محاسبه کنید.

۴۴)فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۰ & a & b\\ ۰ & ۰ & c\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ a & ۰ & ۰\\ b & c & ۰\end{bmatrix}$باشنددستوری برای محاسبه ماتریس های A^n و B^n ارائه دهید.($n\in N$)

۴۵)اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ باشد مقادیر α و β را چنان بیابید که داشته باشیم : $A^{۲}=\alpha A+\beta I_{۲}$ ($I_{۲}$ ماتریس همانی ۲×۲ است.)

۴۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}$ باشد حاصل $A^{۲}-۱۰A+۱۱I$ را پیدا کنید. (I ماتریس همانی ۲×۲ است)

۴۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ نشان دهید که : $A^۲-۷A+۱۰I=O$ (۷۶/۱۰/۱۸کشوری-۱نمره)

۴۸) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ داده شده است، نشان دهید : $A^۲+۴A-۱۰I=۷A$

۴۹) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$، حاصل $A^۲-۷A-I$ را به دست آورید.

۵۱) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، ماتریس $A^۵$ را به دست آورید. (۱۳۸۶/۱۰/۱۶-۰/۷۵ نمره عصر)

۵۱) در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}۳x & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید. (۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۱/۲۵نمره)

۵۲) در تساوی ماتریس زیر مقدار x را پیدا کنید :

الف : $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۳\\ -۲ & ۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}=O$ (۷۵/۱۰/۱۱کشوری-۱نمره) (۱۳۸۶/۱۰/۱۷-۱ نمره تطبیقی تهران)

۵۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۱۰۰}$ را محاسبه کنید. (۸۳/۱۰/۱۹-۱نمره)

۵۴) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ -۱ & ۲ & ۱\\ ۳ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$، حاصل $A^۲+AB$ را به دست آورید. (۱۳۸۲/۴/۲کشوری-۱/۵نمره)

۵۵) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ داده شده نشان دهید : $A^۳+B^۳=۲I$ (۷۷/۳/۱۲کشوری-۱نمره)

۵۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ باشند عدد k را طوری بیابید که $(A+B)^۲=k(A^۲+B^۲)$ باشد.

(۱۳۸۰/۴/۳کشوری-۱/۵نمره)

(تمرین ص۲۰ کتاب جدید)

۱) اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

(تمرین ص۲۰ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۲) اگر $A=\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

(تمرین ص۲۰ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۳)دوماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq \overline{O}$ و $B\neq \overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.(تمرین ص۲۰ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۴) با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی توان نتیجه گرفت $B=C$. (تمرین ص۲۰ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۵) اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان های A را به صورت $A^۲=AA$ و $A^۳=AA^۲$ و ... و $A^n=AA^{n-۱}$ ($n>۱$ و $n\in N$) در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ حاصل $A^۲$ و $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید. (تمرین ص۲۰ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد. (تمرین ص۲۱ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۷) اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{۳\times ۲}$ و $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{۲\times ۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید. $b_{ij}=\begin{cases}i^۲+۱ & ,i=j\\ i+j & ,i>j\\ i-j+۲ & ,i<j\end{cases}$ و $a_{ij}=\begin{cases}i^۲-۱ & ,i=j\\ i-j & ,i>j\\ j-i & ,i<j\end{cases}$ (تمرین ص۲۱ کتاب جدید)

(کتاب چاپ ۹۸)

۸) اگر $A=\begin{bmatrix}r_۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & r_۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & r_۳\end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه ای می گیرید؟ (تمرین ص۲۱ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۹) اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم مرتبه‌ی A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟ (تمرین ص۲۱ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۰) اگر A و B ماتریسی ۳×۳ و تعویض پذیر باشند ($A\times B=B\times A$) ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ (تمرین ص۲۱ کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۱) اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^{۳}$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟ (تمرین ص۲۱ کتاب جدید)

(کتاب چاپ ۹۸)

مثال) دترمینان ماتریس زیر $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$ به دست آورید. (کتاب چاپ ۹۸) (با جواب)

۵۷) دترمینان ماتریس زیر $A=\begin{bmatrix}\cos^{۲}\alpha & \sin^{۲}\alpha\\ \sin^{۲}\alpha & \cos^{۲}\alpha\end{bmatrix}$ به دست آورید.

۵۸) دترمینان ماتریس زیر را بیابید. $A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۴ & ۲\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}۱ & ۵\\ ۲ & ۱۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}\end{bmatrix}$ (ص۲۸کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۵۹) اگر $A=\begin{bmatrix}۲|A| & ۷\\ ۱ & ۴|A|\end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

۶۰) اگر $A=\begin{bmatrix}۵|A| & |A|\\ ۵ & ۴|A|^{۲}\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(۲-|A|^{۳})$ را بیابید. (تمرین۳ ص۳۰و۳۱کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۶۱) اگر در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ داشته باشیم $a+d=b+c$ آنگاه همواره رابطه‌ی $\begin{vmatrix}a-k & b-k\\ c-k & d-k\end{vmatrix}=|A|$ برقرار است.

مثال) دترمینان هر یک از ماتریس های زیر را بر حسب یک سطر و یک ستون دلخواه به دست آورید. (ص۲۸کتاب جدید)

الف) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۲ & ۴ & ۰\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۴\\ -۳ & ۴ & ۱\end{bmatrix}$ (کتاب چاپ ۹۸) (با جواب)

۶۲) حاصل دترمینان ماتریس های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۴ & ۱ & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۹ & ۷ & ۵\\ ۵ & ۶ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}$ را یکبار به کمک بسط دادن نسبت به سطر اوّل و

بار دیگر بسط دادن نسبت به ستون سوم بیابیدو سپس نتیجه حاصل را بیان کنید.

۶۳) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ را بیابید.

۶۴) مقدار k را چنان بیابید که معادله دترمینان $\begin{vmatrix} x & 0 & -k \\ 1 & x-1 & 2 \\ 2k & 0 & x-9 \end{vmatrix}=0$ یک ریشه مضاعف داشته باشد.

۶۵) اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=A-x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ باشد مقدار A را بیابید.

مثال) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به دست آورید. (کدام روش راحت تر است؟).

(ص۲۹کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

جواب : بر حسب سطر سوم :

$$|A|=(-1)\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-(9-4)+2(6-2)+(4-3)=-5+8+1=4$$

با دستور ساروس :

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{matrix}=(4-9-4)-(-4-12+3)=-9+13=4$$

۶۶) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون سوم و با استفاده از دستور ساروس به دست آورید. (کدام روش راحت تر است؟).

۶۷) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ و $|B-A|=65$ باشد مقدار a را بیابید.

۶۸) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند همواره : $|AB|=|A||B|$

۶۹) **کار در کلاس :** ماتریس های $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. ماتریس $A\times B$ را به دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

(ص۲۹کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۷۰) **کار در کلاس :** ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A|=-۶$، سپس ماتریس $A^۲$ را محاسبه و $|A^۲|$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟ (ص۲۹کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۷۱) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^۳|$ را محاسبه کنید. (۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۱نمره)

۷۲) اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ f & b & ۰\\ e & d & c\end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را بر حسب سطر اوّل یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی ، مقایسه کنید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۷۳) اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & -۵\end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به دست آورید. (تمرین۲ ص۳۰و۳۱کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۷۴) **کار در کلاس :** اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را بر حسب سطر اوّل یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی ، مقایسه کنید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟ (ص۳۰کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۷۵) **کار در کلاس :** اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $A=۴\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰\\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲}\end{bmatrix}$ در این صورت را به دست آورید.

(ص۳۰کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۷۶) ماتریسی ۳×۳ چون A بیابید که $|A|=۳$. (تمرین۵ ص۳۰و۳۱کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۷۷) اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر و $a_{۱۱}=k\neq۰$ در این صورت $|A|$ را بیابید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۷۸) اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۳ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$باشند، مقدار $|A^۳B^۲|$ را بدست آورید.

۷۹) اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ a & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه های روی قطر فرعی ، مقایسه کنید.

چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۸۰) اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & f \\ c & d & e \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را بر حسب سطر اوّل یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل

ضرب درایه های روی قطر فرعی ، مقایسه کنید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۸۱) اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را بر حسب سطر اوّل یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل

ضرب درایه های روی قطر فرعی ، مقایسه کنید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۸۲) الف) ماتریس های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $(k\in R)$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور

ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ب)قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ $(k\in R)$ بررسی کنید.(تمرین۸ ص۳۰و۳۱کتاب جدید)

(کتاب چاپ ۹۸)

۸۳) الف) ماتریس های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{bmatrix}$ $(k\in R)$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور

ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & b \\ kc & d \end{bmatrix}$ $(k\in R)$ بررسی کنید.

۸۴) برای ماتریس 2×2 مانند A دو مقدار $|A|$ و $|kA|(k\in R)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

(تمرین۹ ص۳۰و۳۱کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۸۵) ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|kA|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه

نتیجه ای می گیرید؟

۸۶) **کار در کلاس :** اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $A=۴\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰\\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲}\end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به دست آورید.

(ص۳۰کتاب جدید)

۸۷) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $A_{۲\times ۲}$ یک ماتریس باشد آنگاه $|kA|=k|A|$

۸۸) اگر $۲A=\begin{bmatrix}|A| & -۲\\ ۲ & |A|\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

۸۹)اگر A ماتریسی ۳×۳ باشدو $|A|=۵$ در این صورت حاصل $|A||A|$ را بیابید. (تمرین۱۰ ص۳۰و۳۱کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۹۰) الف) ماتریس های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}g & h & i\\ d & e & f\\ a & b & c\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه

کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}$ بررسی کنید.(تمرین ص۳۰و۳۱کتاب جدید)(کتاب چاپ ۹۸)

۹۱) الف) ماتریس های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\frac{۱}{e}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}\end{bmatrix}$ با فرض $e\neq ۰$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را

محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ب) ماتریس های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & ۰ & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\frac{۱}{f}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}b & c\\ ۰ & f\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c & a\\ f & d\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}۰ & f\\ h & i\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}f & d\\ i & g\end{vmatrix}\end{bmatrix}$ با فرض $f\neq ۰$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را محاسبه

کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۹۲) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه ای می گیرید؟ (تمرین۴ ص۳۰و۳۱کتاب جدید)

(کتاب چاپ ۹۸)

۹۳) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون سوم بیابید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۹۵) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر دوم بیابید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۹۶) معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & x \\ x & x & ۲ \end{vmatrix}=۰$ را حل کنید.

۹۷) به هر درایه‌ی واقع در ستون دوم دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۵ \\ ۵ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}$ کدام عدد را بیفزاییم تا مقدار دترمینان ۱۶۸ واحد بیشتر گردد.

۹۸) اگر در دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۷ \\ ۴ & ۲ & a \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{vmatrix}$ به عنصر واقع در سطر دوم و ستون سوم ۲ واحد اضافه شود به مقدار دترمینان کدام عدد افزوده می شود؟ چرا؟

۹۹) در دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۲ & a & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}$ اگر به عنصر واقع در سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، آن گاه a را بیابید.

۱۰۰) اگر $\begin{vmatrix} ۱ & b & a+۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix}=۸$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix} ۱ & b & a \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix}$ را بیابید. (۱۳۸۲/۲/۲۸ -۱/۲۵نمره صبح)

۱۰۱) الف) ماتریس های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+ka & h+kb & i+kc \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۱۰۲) الف) اگر $A=\begin{bmatrix}-۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ -۱\end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

(کتاب چاپ ۹۸) (تمرین۱ ص۳۰و۳۱کتاب جدید)

مسئله : نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ است. (ص۲۲کتاب جدید)

۱۰۳) مسئله : نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}-۴ & ۹\\ ۳ & -۷\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۷ & ۹\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ است.

۱۰۴) آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟ (ص۲۲کتاب جدید)

۱۰۵) **قضیه یکتایی وارون** : وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس های ۲×۲ محاسبه شده است.) در صورت وجود منحصر به فرد است. (ص۲۳کتاب جدید)

۱۰۶) ماتریس مربعی A در تساوی $۲A^۲-A+I=O$ صدق می کند، نشان دهید A وارون پذیر است و وارون را حساب کنید.

(۸۳/۱۰/۱۹-۰/۷۵نمره)

۱۰۷) اگر $AB=BA$ و $A^۳+I=-B^۳$ آنگاه $(A+B)^{-۱}$ کدام است؟

۱۰۸) اگر A ماتریسی وارونپذیر باشد و داشته باشیم $AB=O$، در این صورت : $B=O$ چرا؟

۱۰۹) ثابت کنید اگر جمع دو ماتریس وارونپذیر ماتریس اسکالر باشد آن گاه ضرب آن ها دارای خاصیت جابجایی است یعنی :

$$A+B=kI \text{ و } K\neq ۰ \text{ و } |A|\neq ۰ \text{ و } |B|\neq ۰ \Rightarrow AB=BA$$

۱۱۰) **قضیه** : فرض کنیم A یک ماتریس وارون پذیر باشد. در این صورت $|A|\neq ۰$. (۸۲/۲/۲۸ کشوری ۰/۵نمره عصر)

۱۱۱) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A ..... باشد.

۱۱۲) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید : ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}$ وارون پذیر.....

۱۱۳) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند به طوری که $AB=I$، ثابت کنید A وارون پذیر است و $B=A^{-۱}$.

۱۱۴) به ازای کدام مقدار a ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۷ & ۸ & a\end{bmatrix}$ معکوس پذیر نیست.

۱۱۵) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (در صورت وجود) را با ارائه راه حل بیابید. (ص۲۳کتاب جدید)

مثال) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را به دست آورید. (ص۲۳کتاب جدید)

جواب : چون $|A|=۱۰-۸=۲\neq ۰$ پس A دارای وارون است (وارون پذیر است) و داریم :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۴ & ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

۱۱۶) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱۱۷) ماتریس های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۴ & ۹ \end{bmatrix}$ مفروض اند، حاصل $A^{-۱}B+B^{-۱}A$ را بیابید.

۱۱۸) اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید. (تمرین۶ ص۳۰و۳۱کتاب جدید)

(کتاب چاپ ۹۸)

۱۱۹) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-۱})^{-۱}$ را بیابید. چه نتیجه ای می گیرید؟ (ص۲۳کتاب جدید)

۱۲۰) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر ماتریس A وارون پذیر باشد آنگاه : $(((A)^{-۱})^{-۱})^{-۱}=A$

۱۲۱) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A\times B$ ماتریس واحد باشد، مجموع درایه های ماتریس B را بیابید.

۱۲۲) اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و $A+B=I$ باشد در این صورت حاصل $|B^{۳}|$ را به دست آورید.

۱۲۳) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A\times B)^{-۱}$ را بیابید.

۱۲۴) اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $(AB)^{-۱}$ را به دست آورید.

۱۲۵) اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید. (تمرین۷ ص۳۰و۳۱کتاب جدید)

(کتاب چاپ ۹۸)

۱۲۶) درصورتی که A و B ماتریس های مربعی ۲×۲ و وارون پذیر باشد آنگاه ثابت کنید :

۱) $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ ۲) $\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$

۱۲۷) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید: در صورتی که $|A_{۲\times۲}|=۴$ باشد،مقدار $\left|۳A^{-۱}\right|$ برابر ..... خواهد بود.

۱۲۸) اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $B^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(۲AB)^{-۱}$ را بیابید. (۰/۷۵-۱۳۸۶/۱۰/۱۶ نمره عصر)

۱۲۹) اگر $A=\begin{bmatrix}۵+a & b & c\\ a & ۵+b & c\\ a & b & ۵+c\end{bmatrix}$، با شرط $a+b+c=۵$، دترمینان ماتریس $۵A^{-۱}$ را بیابید.

۱۳۰) **قضیه :** فرض کنیم $AX=B$ شکل ماتریسی دستگاه سه معادله سه مجهولی باشد. اگر $|A|\neq۰$، آنگاه دستگاه $AX=B$ دارای جواب منحصر به فرد به شکل $X=A^{-۱}B$ است.

مثال : دستگاه $\begin{cases}۳x-۴y=۱\\ -x+۲y=۱\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. (ص۲۵کتاب جدید)

جواب : ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و چون $|A|=۶-۴=۲\neq۰$ پس $A^{-۱}$ وجود دارد.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۲\\ \frac{۱+۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ y=۲\end{cases}$$ (کتاب چاپ ۹۸)

۱۳۱) دستگاه $\begin{cases}۲x-۳y=-۱\\ ۵x+۴y=۳۲\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۱۳۲) دستگاه معادلات $\begin{cases}۲x-y=۴\\ -۴x+۲y=۲\end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟

این دو خط نسبت به هم چگونه اند؟ (ص۲۵کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۳۳) **کار در کلاس :** دستگاه معادلات $\begin{cases}۲x-۳y=۳\\ -۴x+۶y=۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱) هر یک از معادلات دستگاه معادله‌ی یک خط در صفحه است. شیب هر یک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

آیا این دو خط بر هم منطبق اند؟

۲) ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

۳) سؤال های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases} x-3y=2 \\ -3x+9y=-6 \end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب دستگاه باشد و $|A|=0$ برای تعداد جواب های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید. (ص۲۶کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۳۴)روی وجودوعدم وجودوتعدادجواب های هریک ازدستگاه های زیربحث کنیدودرصورت وجود،جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

جواب : الف) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$ پ) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$

(تمرین۱۳ ص۳۰و۳۱کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۳۵) دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و ماتریس معلومات آن $\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید. (تمرین۱۱ ص۳۰و۳۱کتاب جدید) (کتاب چاپ ۹۸)

۱۳۷) به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx+3y=4 \\ x-2y=3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد. (تمرین۱۲ ص۳۰و۳۱کتاب جدید)

(کتاب چاپ ۹۸)

۱۳۸) مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+3y=-3 \\ 4x+(m+4)y=2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد. (۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۱/۲۵نمره)

۱۳۹) به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} (m+1)x+8y=2m \\ 4x+(m+5)y=6 \end{cases}$ دارای بیشمار جواب است.

۱) جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید :

الف : در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک ..... است.

ب : در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل یک ..... است.

پ : در حالتی که صفحه‌ی P بر محور L عمود نباشد و با مولد d موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، سطح حاصل یک ..... است.

ت : در حالتی که صفحه‌ی P با مولد d موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است.

ث : در حالتی که صفحه‌ی P با مولد d موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است.

ج : اگر صفحه‌ی P به گونه ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور L نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است.

ز : اگر صفحه‌ی P به گونه ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و از رأس آن بگذرد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی ..... است.

ژ : هرگاه صفحه شامل محور رویه نباشد و هر دو دامنه را قطع کند، آن گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است.

۲) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید :

الف) مقطع یک سطح مخروطی با صفحه ای دلخواه سهمی است این سهمی با مولد موازی است.

ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (I) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود. (۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۰/۲۵نمره)

پ) مقطع یک سطح مخروطی با صفحه ای دلخواه سهمی است این صفحه با مولد موازی است.

ت) صفحه ای با مولد سطح مخروطی دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. (۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۰/۵نمره)

۳) جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) که همه‌ی آنها یک ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. (۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۰/۲۵نمره)

۴) واژه زیر را تعریف کنید : مکان هندسی (۸۲/۶/۲۰-۱نمره) (۱۳۸۶/۰۶/۱۰-۰/۵ نمره) (۱۳۸۸/۰۳/۱۸-۰/۵ نمره)

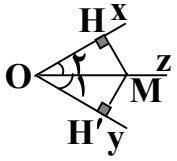
۵) جمله زیر را با کلمه مناسب تکمیل کنید.

نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB است اگروفقط اگر فاصله M از A و B..... باشد. (۸۳/۶/۸-۰/۲۵نمره)

۶) **فعالیت ۱ :** ۱) هر نقطه روی نیمساز زاویه .....

۲) هر نقطه که ..... روی نیمساز زاویه است.

اکنون گزاره زیر را کامل کنید :



یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر ..... $(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) M \in Oz \Leftrightarrow \cdots$

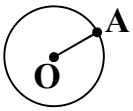
بنابراین می توان گفت : نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ..... (ص ۳۶ چاپ ۹۸)

۷) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. مکان هندسی نقطه ای در صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد ..... است. (۰/۲۵-۱۳۸۸/۰۶/۰۷ نمره)

۸) مستطیل $ABCD$ مفروض است. نقطه ای در صفحه‌ی این مستطیل را بیابید که از دو رأس A و B به یک فاصله باشد و فاصله‌ی آن از دو ضلع AB و BC مساوی باشد. (روش حل مسأله را تشریح کنید.)

۹) مکان هندسی مرکز دایره هایی را که بر دو خط متقاطع داده شده مماسند چیست؟

۱۰) **فعالیت ۲ :** دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.



الف) هر نقطه‌ی دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله ای دارد؟

ب) اگر B، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصله‌ی r باشد ($OB = r$) با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید : $A \in C \Leftrightarrow OA = r$

نتیجه : نقطه‌ی A روی دایره‌ی $C(O,r)$ است، اگر و تنها اگر .....

نتیجه : دایره‌ی $C(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ..... (ص ۳۴ چاپ ۹۸)

۱۱) مکان هندسی مرکز دایره هایی را پیدا کنید که از نقطه مفروض A می گذرند و شعاع آنها برابر R است.

۱۲) دایره $C(O,R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماس هایی به طول d بر این دایره می توان رسم کرد.

۱۳) دایره $C(O,۶)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماس هایی به طول ۸ بر این دایره می توان رسم کرد.

۱۴) دایره $C(O,R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای را تعیین کنید که مماس های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند. (۱/۲۵-۱۳۸۶/۰۳/۱۹ نمره)

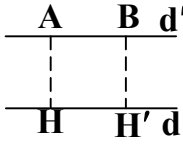
۱۵) در دایره $C(O,R)$ وترهای به طول K رسم شده اند، مکان هندسی نقطه‌ی M وسط این وترها را تعیین کنید.

۱۶) سکه ای به شعاع ۲ سانتی متر را روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۲ سانتی متر پرتاب می کنیم، مکان هندسی نقطه ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاًداخل مربع واقع شود. (۰/۵-۱۳۸۵/۰۶/۱۱ نمره)

۱۷)پاره خط AB به اندازه‌ی L واحد از صفحه‌ی مختصات چنان می لغزد که همواره دو سر آن، A و B بر روی محورهای مختصات قرار دارند. مکان هندسی نقطه‌ی M وسط AB کدام است؟

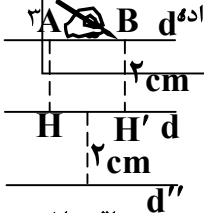
۱۸) مطلوب است مکان هندسی نقطه هایی که مجموع مربع های فاصله هایشان از دو خط عمود بر هم، مساوی مقدار ثابت a^2 باشد.

۱۹) **فعالیت ۳ :** دو خط موازی d، d' را که فاصله‌ی آنها از هم ۲ سانتی متر است، در نظر بگیرید.



آیا نقطه های دلخواه A و B روی d'، از خط d فاصله‌ی یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟

آیا می توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی متر باشد و روی d' نباشند؟



همه نقاطی که از d به فاصله ۲ سانتی متر واقع اند، روی چه شکلی قرار دارند؟

آیا گزاره زیر درست است؟

یک نقطه درصفحه،ازخط dبه فاصله۲سانتی متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.

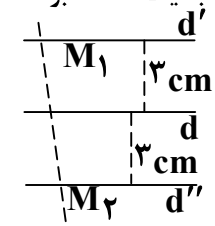
آیا نتیجه گیری زیر درست است؟ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از آن می باشد. (ص ۳۷ چاپ ۹۸)

۲۰)مکان هندسی نقطه ای ازصفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی d به فاصله معلوم k باشد. ($k > ۰$)(۸۷/۳/۱۹-۰/۵ نمره)

۲۱) دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ مفروضند نقاطی را در صفحه این دو خط بیابید که از $d_۱$ به فاصله ۱ و از $d_۲$ به فاصله ۲ باشند.

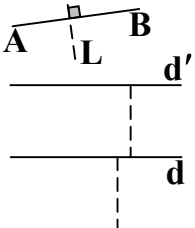
۲۲) دو خط متقاطع d و d' و نقطه‌ی A که روی هیچ یک از این خطوط نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه پیدا کنید که از d به فاصله ۱ و از d' به فاصله ۲ و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ باشد. مسأله حداکثرچند جواب می تواند داشته باشد؟

مثال : دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. (ص ۳۸ چاپ ۹۸)

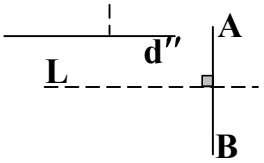


حل : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف AB

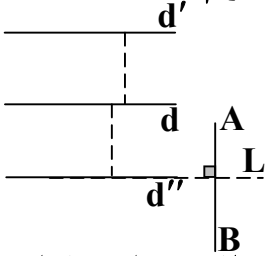
و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط L



(عمودمنصف AB) و دو خط موازی d' و d'' جواب مسئله است (نقاط $M_۱$ و $M_۲$).



بحث در وجود جواب : اگر L یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند



دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر L بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.

۲۳) تمرین۱ص۳۹) مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند.

ب) مرکزهای همه‌ی دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس اند.

پ) مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند.

ت) مرکزهای همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O,r)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج اند.

۲۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۰/۵نمره)

مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند. نیمساز زاویه بین آن دو خط می باشد.

۲۵) دو خط L و L' در نقطه O متقاطع اند، نقاطی در صفحه این دو خط مشخص کنید که از دو خط به یک فاصله و از نقطه O به فاصله‌ی R_{cm} باشد مسئله چند جواب دارد؟ $(R \neq ۰)$

۲۶)مکان هندسی مرکزتوپی که روی یک سطح صاف درامتدادیک خط مستقیم می غلتد را با رسم شکل بیابید. (۸۹/۱۳۰۶-۰/۵ نمره)

۲۷) مکان هندسی مرکز دایره هایی از فضا که در یک نقطه مشخص بر یک خط داده شده مماس باشند را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید. (۷۶/۳/۲۸-۰/۷۵نمره) (۱۳۹۱/۰۶/۱۸-۰/۷۵ نمره)

۲۸) مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد چیست؟

۲۹) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (۱۳۸۸/۰۶/۰۷-۰/۲۵ نمره)

مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد . . . . . می باشد.

۳۰) تمرین۲ص۳۹) نقاط A، B، C و D در صفحه مفروش اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید). (تمرین ص ۳۹ چاپ ۹۸)

۳۱) تمرین۳ص۳۹) نقاط A، B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید). (تمرین ص ۳۹ چاپ ۹۸)

۳۲) تمرین۴ص۳۹) نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید). (تمرین ص ۳۹ چاپ ۹۸)

۳۳)تمرین۵ص۳۹) هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

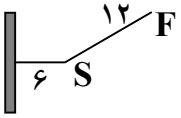
۳۴) تمرین۶ص۳۹) هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P، یک سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت های مختلف در باره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت). (تمرین ص ۳۹ چاپ ۹۸)

۳۵) مکان هندسی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه را بیابید که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر k باشد.

۳۶) مکان هندسی نقطه ای در صفحه را بیابید که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد.

۳۷) دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ بحث کنید.(مسأله چند جواب دارد؟ (بحث کنید)) (۱۳۹۰/۰۶/۰۵-۱ نمره)

۳۸) نمودار مقابل محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فواره‌ی F را نشان می دهد.



می خواهیم میله‌ی پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میله‌ی پرچم را تعیین کنید.

۳۹) مکان هندسی نقطه ای در فضا را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله d باشد.

۴۰) مکان هندسی رأس های مثلثی هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند را تعیین کنید. (نهایی سال ۸۲)

۴۱) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید : در صفحه، مکان هندسی رأس های مثلثی هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند، دو خط موازی قاعده مثلث، به فاصله، ارتفاع از آن و در دو طرف آن است.

۴۲) مکان هندسی نقطه ای از صفحه را پیدا کنید که از دو خط موازی به یک فاصله باشد.

۴۳) مکان هندسی مرکز دایره هایی را بیابید که بر دو خط متوازی مماس باشند.

۴۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید : مکان هندسی مراکز همه دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس هستند، دو خط موازی با d است که فاصله ان ها تا خط d برابر r است.

۴۵) مکان هندسی وسط های پاره خط هایی را که دو سرشان روی دو خط موازی واقعند، پیدا کنید.

۴۶) مکان هندسی نقطه ای در فضا را پیدا کنید که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد.

۴۷) دو صفحه‌ی P و Q و خط d با هم موازیند. مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و Q به یک فاصله باشد و از خط موازی d به فاصله‌ی معلوم k باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید. (در مورد جواب های مسئله بحث کنید.)

۴۸) دایره مکان هندسی چه نقطه ای از صفحه است. (نهایی سال ۸۱-۰/۷۵نمره)

۴۹) مکان هندسی نقطه ای از یک صفحه که از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه به فاصله ثابتی است چیست؟

۵۰) مکان هندسی نقطه ای از فضا که از نقطه ثابتی واقع در آن به فاصله ثابتی است چیست؟

۵۱) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن را بنویسید.

۵۲) مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه‌ی متمایز A و B واقع در یک صفحه می گذرند چیست؟

۵۳) سه نقطه متمایز A، B و C در یک صفحه داده شده اند. نقطه ای از این صفحه را بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد.

۵۴) مکان هندسی مرکز دایره ای را تعیین کنید که در نقطه مشخص A بر یک خط داده شده مماس باشد و این دایره از نقطه‌ی ثابت B خارج آن خط بگذرد.

۵۵) با استفاده از خط کش و پرگار مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد. (روش رسم را توضیح دهید.) (مراحل رسم را توضیح دهید.) (۱۳۸۷/۰۶/۱۴-۱ نمره) (۱۳۸۹/۱۰/۲۵-۱ نمره) (۱۳۹۵/۱۰/۰۶-۰/۷۵ نمره)

D•———•E

۵۶) مکان هندسی مرکز دایره های به شعاع R، که بر خط مفروض d مماس است چیست؟

۵۷) در یک صفحه دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از هم قرار دارند. فقط یک نقطه مانند M در صفحه وجود دارد که به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از A و m سانتی متر از Bقرار دارند. مقدار m کدام است؟

۵۸) در یک صفحه دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از هم قرار دارند. دو نقطه‌ی M و M' در صفحه وجود دارد که به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از A و m سانتی متر از B قرار دارند. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

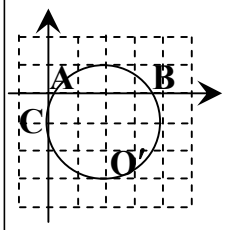
۵۹) مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو خط موازی L و L' به‌یک فاصله باشد و از نقطه ثابت O به فاصله‌ی R باشد، را به کمک استدلال استقرایی بیابید.

۶۰) مکان هندسی نقطه ای در فضا که از دو صفحه موازی M و R به یک فاصله باشد و از نقطه ثابت P، به فاصله d باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید.

مثال:معادله دایره ای به مرکز $O'(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

حل : به کمک دستور بالا معادله‌ی استاندارد دایره‌ی فوق نوشته می شود : $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ (ص ۴۰ چاپ ۹۸)

اگر در این معادله، $y = ۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور xها به دست می آید :



$$(x-۲)^۲ + ۱ = ۴ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۳ \Rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow x = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

لذا دایره فوق محور xها را در نقاط $A(۲-\sqrt{۳},۰)$ و $B(۲+\sqrt{۳},۰)$ قطع می کند

و اگر در این معادله، $x = ۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور yها به دست می آید :

$$۴ + (y+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow (y+۱) = ۰ \Rightarrow y = -۱$$

بنابراین دایره فوق محور yها را در نقطه‌ی $C(۰,-۱)$ قطع می کند و می دانیم که اگر یک خط دایره ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان طور که در شکل هم دیده می شود، دایره در نقطه‌ی C بر محور yها مماس است.

۶۱) معادله‌ی دایره ای به مرکز $O'(۵,۳)$ و شعاع ۵ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

۶۲)معادله دایره ای به مرکز $O'(۲,۱)$وشعاع ۱ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم به دست آورید.

۶۳) معادله دایره ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که از نقطه $(-۱,۲)$ بگذرد.

۶۴)معادله ونوع مکان هندسی نقاطی ازصفحه راتعیین کنیدطوری که مجموع مربعات فواصل هرکدام از آن ها از دو نقطه‌ی $A(-۱,۰)$ و $B(۱,۰)$ برابر ۴ باشد. (۱۳۸۳/۱۰/۱۹-۰/۷۵نمره صبح)

۶۵) معادله ی دوایری را تعیین کنید که از مبدأ مختصات بگذرند و مجموع دو وتری که روی محورهای مختصات جدا می کنند برابر ۱۴ باشد و طول مرکز دوایر برابر ۴ باشد.

۶۶) معادله ی دوایری را تعیین کنید که از مبدأ مختصات بگذرند و خط $y = ۶x$ قطری از آن باشد و مجموع دو وتری که روی محورهای مختصات جدا می کنند برابر ۱۴ باشد.

مثال) مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$ را به دست آورید. (ص ۴۱ چاپ ۹۸)

جواب :

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱^۲ - ۱ + y^۲ - ۴y + ۲^۲ - ۴ + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O(-۱,۲) \text{ و } r = ۲$$

۶۷) **فعالیت :** می خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله‌ی ضمنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ را در حالت کلی به دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید :

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \Rightarrow (x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴}) + (y^۲ + by + \cdots - \cdots) + c = ۰$$

$$\Rightarrow (x + \cdots)^۲ + (y + \cdots)^۲ + \cdots = ۰ \Rightarrow (x + \cdots)^۲ + (y + \cdots)^۲ = \cdots$$

$$\Rightarrow O(۰۰۰,۰۰۰) \text{ و } r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$$

با توجه به نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه ای در باره‌ی a، b و c به دست می آید؟

جواب :

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\Rightarrow x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}-\frac{a^۲}{۴}+y^۲+by+\frac{b^۲}{۴}-\frac{b^۲}{۴}+c=۰$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲+\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}=۰\Rightarrow (x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

$$\Rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}) \text{ و } r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$$

$$a^۲+b^۲-۴c>۰\Rightarrow a^۲+b^۲>۴c$$

۶۸) اگر شعاع دایره‌ی $x^۲+y^۲-۴x+۶y+m=۰$ برابر ۳ باشد، مقدار m را بیابید.

۶۹) کار در کلاس :

۱) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ و شعاع آن ۳ باشد.

۲) معادله‌ی دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

۳)کدام یک ازروابط زیر می تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$

ب) $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

ج) $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰$

جواب : ۱)

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲\Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۳^۲ \text{ و یا } x^۲+y^۲-۲y-۸=۰$$

۲)

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲\Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۰)^۲=r^۲\Rightarrow x^۲+y^۲=r^۲$$

۳) الف) روش اول :

$$x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰\Rightarrow x^۲-۲x+۱^۲-۱+y^۲-۶y+۳^۲-۹-۱=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۱\Rightarrow$$

معادله‌ی دایره به مرکز $O(۱,۳)$ و طول شعاع $\sqrt{۱۱}$ می باشد.

روش دوم :

$$\Delta=a^۲+b^۲-۴c=۴+۳۶+۴=۴۴>۰$$

درنتیجه معادله‌ی دایره به مرکز $O(-\frac{a}{۲}=۱,-\frac{b}{۲}=۳)$ و طول شعاع $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{\Delta}=\frac{\sqrt{۴۴}}{۲}=\sqrt{۱۱}$ می باشد.

ب) روش اول : $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰\Rightarrow x^۲+۲x+۱^۲-۱+y^۲+۳y+(\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}+۴=۰$

$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y+\frac{۳}{۲})^۲=-\frac{۳}{۴}$ این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.

روش دوم : این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند. $\Delta=a^۲+b^۲-۴c=۴+۹-۱۶=-۳$

ج) در معادله‌ی دایره باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یک باشد.

$۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰\Rightarrow x^۲+y^۳-\frac{۳}{۲}x+۲y-۱=۰$

روش اول : $\Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۲}x+(\frac{۳}{۴})^۲-\frac{۹}{۱۶}+y^۲+۲y+۱^۲-۱-۱=۰\Rightarrow (x-\frac{۳}{۴})^۲+(y+۱)^۲=\frac{۴۱}{۱۶}$

معادله‌ی دایره به مرکز $O(\frac{۳}{۲},-۱)$ و طول شعاع $\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}$ می باشد.

روش دوم : $\Delta=a^۲+b^۲-۴c=\frac{۹}{۴}+۴+۴=\frac{۴۱}{۴}>۰$

درنتیجه معادله‌ی دایره به مرکز $O(-\frac{a}{۲}=\frac{۳}{۲},-\frac{b}{۲}=-۱)$ و طول شعاع $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{\Delta}=\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}$ می باشد. (ص ۴۲ چاپ ۹۸)

مثال) مختصات مرکز و طول شعاع دایره $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$ را به دست آورید. (ص ۴۱ چاپ ۹۸)

جواب : $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰\Rightarrow (x+۱)^۲-۱+(y-۲)^۲-۴=-۱\Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$

$\Rightarrow O'(-۱,۲)r==۲$

۷۰) مختصات مرکز و طول شعاع دایره $x^۲+y^۲-x+۲y=۱$ را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.(۸۶/۱۰/۱۶-۱ نمره عصر)

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(-۲,-۱)$ مرکز آن و $M(۱,۱)$ یک نقطه از آن باشد. (ص ۴۲ چاپ ۹۸)

حل : مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادله‌ی آن را بنویسیم. روشن است که $OM=r$ پس طول OM را به دست می آوریم : $OM=\sqrt{(x_M-x_O)^۲+(y_M-y_O)^۲}=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۱۳}$

و معادله دایره را به صورت زیر نوشته می شود : $(x+۲)^۲+(y+۱)^۲=۱۳$

و به روش دیگر می توان گفت مختصات هر نقطه روی دایره در معادله‌ی دایره صدق می کند.

$$(x-\alpha)^۲+(y+\beta)^۲=r^۲ \Rightarrow (۱+۲)^۲+(۱+۱)^۲=r^۲ \Rightarrow r^۲=۱۳ \Rightarrow (x+۲)^۲+(y+۱)^۲=۱۳$$

۷۱) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(۲,-۱)$ بوده و از نقطه $(۲,۳)$ بگذرد. (۱۳۸۶/۱۰/۱۷-۰/۷۵ نمره تطبیقی تهران)

۷۲) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که از نقطه‌ی $(۱,-۱)$ بگذرد و خطوط $y=x+۱$ و $y=۱-x$ شامل دو قطر آن باشند.

۷۳) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشد. (۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۱/۵نمره)

۷۴)معادله‌ی دایره ای رابیابیدکه خط $۴x-۳y-۲۴=۰$ معادله‌ی قطری ازآن بوده ودوسر این قطر بر محورهای مختصات واقع شود.

۷۵)معادله دایره ای رابنویسیدکه معادله قطرهای آن به صورت $۲m(x+y)+۲mx+(m-۱)y=۰$ بوده وشعاعش برابر۳ باشد

۷۶) دو دایره‌ی به معادله های $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۲۰=۰$ و $x^۲+y^۲+۴x+۲y-۴=۰$ مفروض اند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگتر که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است کدام است؟

۷۷)دو دایره‌ی به معادله های $x^۲+y^۲-۸x-۶y+۹=۰$ و $x^۲+y^۲-۶x-۶y+۹=۰$ مفروض اند. اندازه بزرگترین قطعه مماسی که یک سر آن بر روی دایره بزرگتر و سر دیگر آن قطعه‌ی تماس بر روی دایره کوچکتر باشد، را بیابید.

۷۸) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $y=x+۳$ بوده و در نقطه ای به عرض ۲ بر محور y ها مماس گردد.

۷۹) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+۲$ بوده و در نقطه ای به طول ۵ بر محور طول ها مماس باشد.

(۱۳۸۶/۱۰/۱۶-۱ نمره صبح)

۸۰) دایره ای بر دو نقطه‌ی $(۰,-۳)$ و $(۹,۰)$ گذشته و بر محور yها مماس است. این دایره محور xها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام طول قطع می کند؟

۸۱) دایره ای بر دو نقطه‌ی $(۰,-۹)$ و $(۰,-۳)$ گذشته و بر محور xها مماس است. این دایره محور yها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می کند؟

۸۲) معادله دایره ای را بنویسید که مرکزآن $C(۵,-۵)$ بوده و بر محورهای مختصات مماس گردد.

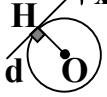
۸۳) دو دایره از نقطه $(۴,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس اند. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

۸۴) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y=۳x+۴$ و در ربع سوم بر هر دو محور مماس باشد.

۸۵)**فعالیت۲:**معادله دایره ای رابنویسیدکه نقطه $O(۱,-۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.

۱) با توجه به آنچه از هندسه‌ی ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطه‌ی تماس (H) بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ .....

۲) طول شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره از .....



۳) به کمک دستور فاصله‌ی نقطه از خط داریم : $r = OH = \frac{|\cdots\cdots\cdots|}{\sqrt{\cdots+\cdots}} = \cdots$

۴) معادله‌ی دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می نویسیم. $(x-1)^2+(y+1)^2 = \cdots \Rightarrow \cdots$ (ص ۴۳ چاپ ۹۸)

۸۶) معادله دایره ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که بر خط $9x+12y=10$ مماس باشد.

۸۷) معادله دایره ای به مرکز $(-2,1)$ را بنویسید که بر خط $3x-4y=5$ مماس باشد.

۸۸) معادله دایره ای را بنویسید که هم مرکز با دایره $x^2+y^2-2x+6y-1=0$ و بر خط $3x-4y+5=0$ مماس باشد.

۸۹) شعاع دایره ای را بیابید که مرکز آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع شده و از نقطه‌ی $A(-2,-1)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=2x$ مماس شود.

۹۰) به ازای کدام مقدار m خط به معادله‌ی $y=mx+1$ بر دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y=0$ مماس است؟

۹۱) معادله دایره ای را بنویسید که معادله قطرهای آن به صورت $(m+2)x+(m-1)y=3$ بوده و بر خط $3x-4y=-13$ مماس باشد.

۹۲) معادله دایره ای را بنویسید که بر دو خط $x=-1$ و $x=5$ مماس باشد و مرکز آن روی خط $2x+y=1$ باشد.

۹۳) معادله دایره ای را بنویسید که بر دو خط $y=x+2$ و $y=x+6$ مماس باشد و مرکز آن روی خط $2x+y=7$ باشد.

۹۴) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-4,2)$ بوده و بر خط $2x-6=0$ مماس باشد.

۹۵)فاصله‌ی نزدیکترین و دورترین نقاط دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ از خط به معادله‌ی $3x+4y+9=0$، را بیابید.

۹۶) **کار در کلاس** : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند. (راهنمایی : می دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم شود آن وتر را نصف می کند.) (ص ۴۳ چاپ ۹۸)

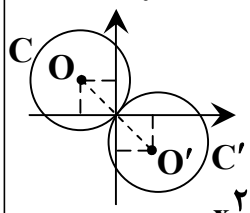
۹۷) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(1,-2)$ بوده و روی خط به معادله‌ی $3x+4y=10$ وتری به طول ۸ جدا کند. (راهنمایی : می دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم شود آن وتر را نصف می کند.)

۹۸) دورترین و نزدیکترین فاصله نقطه $A(5,-1)$ از دایره به معادله $x^2+y^2-4x-6y=3$ را بیابید.

۹۹) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید :

مکان هندسی مراکز همه دایره هایی با شعاع ثابت $\frac{r}{2}$ که بر دایره $C(O,2r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی هستند دایره $C'(O,\frac{5r}{2})$ است.

۱۰۰) مثال) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(-1,1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-2x+2y=0$ از مماس بیرونی باشد.



حل : مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می آوریم :

$$x^2+y^2-2x+2y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2 \Rightarrow O'(1,-1) \text{ و } r'=\sqrt{2}$$

و چنانچه از هندسه‌ی ۲ می دانیم اگر $d=OO'$ طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس خارج باشد، $d=r+r'$

بنابراین داریم : $$d=OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$d=r+r'=2\sqrt{2} \Rightarrow r+\sqrt{2}=2\sqrt{2} \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

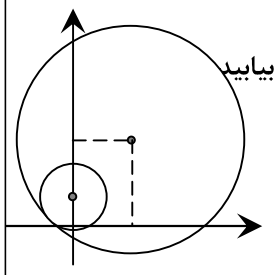
و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره‌ی (C) را می نویسیم :

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-2y=0$$ (ص ۴۳ چاپ ۹۸)

۱۰۱) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(3,1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2+2x-4y=4$ از مماس بیرونی باشد.

۱۰۲)به ازای چه مقادیری از a دودایره $x^2+y^2-2x+4y+a=0$ و $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ مماس خارج هستند؟

۱۰۳) **فعالیت۳:** معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایره‌ی $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد. ۱) معادله‌ی دایره‌ی فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید



$$(x-000)^2+(y-000)^2=000 \Rightarrow O'(000,000) \text{ و } r'=000$$

۲) طول خط المرکزین دو دایره را به دست آورید. $$d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=000$$

۳) با توجه به آنچه از هندسه ۲ می دانیم، داریم : $$d=|r-r'| \Rightarrow |r-000|=2\sqrt{2} \Rightarrow r-000=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r=000$$

۴) با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می نویسیم : $$(x-0)^2+(y-1)^2=(000\pm 2\sqrt{2})^2$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟ (ص ۴۳ چاپ ۹۸)

۱۰۴) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(1,-1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2+2x+2y-7=0$ از مماس درونی باشد.

۱۰۵) **کار در کلاس :** وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2-4x-6y=3$ و $x^2+y^2-10x-14y+73=0$

ب) $x^2+y^2-2x=1$ و $x^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

د) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-8x-4y+19=0$

(راهنمایی:مختصات مرکزوطول شعاع های هردودایره را به دست آورده و پس از تعیین طول خط المرکزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.) (ص ۴۴ چاپ ۹۸)

۱۰۶) به ازای چه مقادیری از a دو دایره $x^2+y^2+4x=0$ و $x^2+y^2-2x+8y+a=0$ مماس داخل هستند؟

۱۰۷) اندازه مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+8y=32$ و $(x-7)^2+(y-4)^2=1$ را بیابید.

۱۰۸) **فعالیت ۴ :** می خواهیم وضعیت خط به معادله‌ی $x+y=4$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنیم.

روش اول : از معادله‌ی خط $y=4-x$، را در معادله‌ی دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید.) : $x^2+(4-x)^2-2(4-x)-3=0 \Rightarrow \cdots$

باساده کردن معادله حاصل وتعیین علامت Δ،نشان دهیدمعادله فوق ریشه حقیقی نداردودر نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم : معادله‌ی دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله‌ی مرکز دایره از خط را بیابید.

چگونه تشخیص می دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (ص ۴۵ چاپ ۹۸)

۱۰۹) سؤال : اگر در معادله‌ی حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta>0$ یا $\Delta=0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت ها فاصله‌ی مرکز دایره از خط چگونه است؟ (ص ۴۵ چاپ ۹۸)

۱۱۰) وضعیت خط به معادله‌ی $x+y=0$ و دایره‌ی $x^2+y^2=2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۱۱) وضع خط $x+y-5=0$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ مشخص کنید.

۱۱۲) ثابت کنید معادله خطی که در نقطه $A(a,b)$ واقع بر دایره $x^2+y^2=R^2$ بر این دایره مماس باشد، به صورت $ax+by=R^2$ می باشد.

۱۱۳) معادله خطی را بنویسید که در نقطه $A(4,3)$ بر دایره مماس $x^2+y^2=25$ باشد. (۱/۲۵-۸۲/۰۴/۰۲نمره)

۱۱۴) مثال) در نقطه‌ی $A(2,3)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید. (ص ۴۵ چاپ ۹۸)

حل : روش اول : با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است. با تعیین مختصات مرکز دایره شیب OA را تعیین می کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می کنیم.

$$x^2+y^2-2x-2y=3 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow O(1,1)$$

$$m_{OA}=\frac{3-1}{2-1}=2 \Rightarrow m_d=-\frac{1}{2} \Rightarrow y-3=-\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow d \text{ معادله مماس } : y=-\frac{1}{2}x+4$$

روش دوم :

$$x_1x+y_1y+\frac{a}{2}(x+x_1)+\frac{b}{2}(y+y_1)+c=0$$

$$\Rightarrow 2x+3y+\frac{(-2)}{2}(x+2)+\frac{(-2)}{2}(y+3)=3 \Rightarrow x+2y=8 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+4$$

۱۱۵) در نقطه $A(2,3)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی رسم کرده ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

(۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۱نمره)

۱۱۶) تمرین۱ص۴۶) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن بوده و $A(3,2)$ نقطه ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

۱۱۷) معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد. (۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری۱/۵نمره)

۱۱۸) معادله دایره ای که از نقاط $A(2,3)$ و $B(-2,1)$ بگذرد و مرکزش روی خط $x-y=1$ باشد بیابید.

۱۱۹)شعاع دایره ای که از دو نقطه‌ی $A(-2,2)$ و $B(1,5)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y=x+1$ باشد کدام است؟

۱۲۰) تمرین۲ص۴۶) حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.

(۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۱نمره)

۱۲۱) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، منحنی به معادله‌ی $2x^2+(a^2-7)y^2+2ax+4y+4a=0$ یک دایره است؟

۱۲۲) مقدار k را طوری تعیین کنید که $3x^2+3y^2-6x+12y+k=0$ معادله دایره ای به شعاع ۳ باشد. سپس مختصات مرکز این دایره را بیابید.

۱۲۳) درستی و یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید نقطه‌ی $A(4,-1)$ خارج دایره $x^2+y^2-2x+4y-6=0$ قرار دارد.

۱۲۴) تمرین۳ص۴۶) وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره

$x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید. (ص ۴۶ چاپ ۹۸)

۱۲۵) طول قطعه مماسی که از نقطه‌ی $A(1,3)$ بر دایره‌ی به معادله‌ی $x^2+y^2-6x+8y-3=0$ رسم شود را بیابید.

۱۲۶) طول کوتاهترین وتری از دایره‌ی $x^2+y^2-6x-8y-24=0$ که از نقطه‌ی $A(1,1)$ می گذرد را بیابید.

۱۲۷) تمرین۴ص۴۶) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1$ و $(x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

۱۲۸) وضعیت دو دایره با معادلات $(x-1)^2+(y+2)^2=36$ و $x^2+y^2+4x-4y+7=0$ را مشخص کنید.

۱۲۹) دایره های $x^2+y^2-2x=4$ و $x^2+y^2=4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (۱۳۹۷/۱۰/۱۹- ۱۰صبح-۱/۷۵نمره)

۱۳۰) وضعیت دو دایره $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ و $(x-2)^2+(y+2)^2=1$ نسبت به هم چگونه است؟

۱۳۱) تمرین۵ص۴۶) نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله‌ی دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله‌ی مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۱۳۲) نقاط $A(1,1)$ و $B(2,4)$ و $C(-2,6)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله‌ی دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

۱۳۳) معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $(-2,-2)$ و $(1,1)$ و $(-5,1)$ بگذرد. (۱۳۸۲/۱۰/۲۰-۱نمره)

۱۳۴) تمرین۶ص۴۶) وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x+4y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

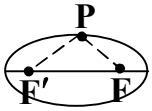
ب) $x+y=2$ و $x^2+y^2=2$

ج) $x+y=1$ و $x^2+y^2-2x-2y=2$

۱۳۵) مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) را پید ا کنید که فاصله آنها از نقطه‌ی $A(2,4)$، $\sqrt{2}$ برابر فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی $B(1,2)$ باشد. (۸۲/۲/۲۸کشوری عصر-۱نمره)

۱۳۶)ازنقطه $(5,0)$دومماس بردایره $x^2+y^2=5$ رسم می کنیم تابردایره درنقاط A و B مماس شوندمختصات A و B را پیدا کنید.

۱۳۷) **فعالیت ۱ :** یک تکه نخ در نظر گرفته و دو سر آن را مطابق شکل در دو نقطه‌ی F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ L باشد و $L > FF'$ یک قلم را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی ای به گونه ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته ای خواهد بود که بیضی نام دارد.



۱) یک نقطه‌ی دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله های این نقطه از دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر چیست؟

۲) یک نقطه‌ی دلخواه مانند A در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' کوچکتر از L است.

(راهنمایی : پاره خط FA را از سمت A امتداد دهید تا بیضی را قطع کند سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۳) یک نقطه‌ی دلخواه مانند B بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' بزرگتر از L است.

(راهنمایی : اگر نقطه‌ی D محل برخورد FB با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده کنید.)

۴)ازمراحل(۱)تا(۳)متوجه وجودچه ویژگی مشترکی در همه‌ی نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه‌ی دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

۵) با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

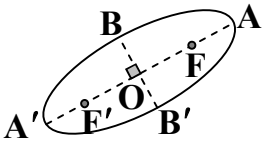
بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو ..... یک مقدار ..... است.

دو نقطه‌ی ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به دست آوردیم و آنها F و F' را نامیدیم کانون های بیضی نام دارند. (ص ۴۷ چاپ ۹۸)

۱۳۸) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی است ، یک ..... است.

۱۳۹) **فعالیت ۲ :** بیضی مقابل را در نظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطرکانونی) و BB' قطر کوچک (قطر ناکانونی) بیضی نامیده می شود. F و F' کانون های بیضی هستند و نقطه‌ی O، وسط پاره خط FF'، مرکز بیضی است.



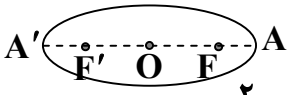
فرض کنید اندازه‌ی پاره خط های OA، OB و OF را به ترتیب با a، b و c نمایش دهیم.

بنابراین فاصله‌ی دو کانون بیضی برابر $2c$ است.

۱) در ترسیم بیضی با نخ و قلم دو وضعیت را که قلم در نقاط A و A' قرار می گیرد در نظر بگیرید.

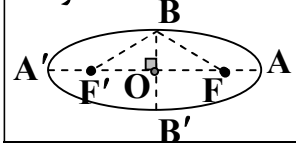
الف) نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آنجا نتیجه بگیرید $OA' = OA$ و لذا اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.



۲) الف) در رسم بیضی وضعیتی را که قلم در نقطه‌ی B قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید $b^2 + c^2 = a^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطه‌ی B' نتیجه بگیرید $OB'^2 + c^2 = a^2$ و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB' = OB = b$ و لذا اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.



(ص ۴۸ چاپ ۹۸)

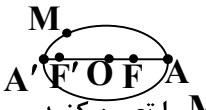
۱۴۰)فرض کنید F و F' کانون های بیضی اند و نقطه‌ی O، وسط پاره خط FF'، مرکز بیضی است. با توجه به تساوی $AF = A'F'$ نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می کند و از آنجا نتیجه بگیرید که طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ می باشد.

۱۴۱) فرض کنید F و F' کانون های بیضی اند و نقطه‌ی O، وسط پاره خط FF'، مرکز بیضی است. ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر $2a$ است.

۱۴۲) یک نقطه‌ی دلخواه مانند A درون بیضی در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی F و F' (کانون های بیضی) وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' کوچکتر از $2a$ (طول قطر کانونی) است.

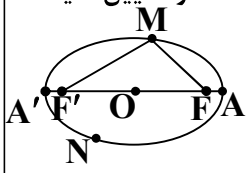
۱۴۳) یک نقطه‌ی دلخواه مانند B بیرون بیضی در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی F و F' (کانون های بیضی) وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' بزرگتر از $2a$ است.

۱۴۴) جای خالی را با عبارات با کلمات مناسب پر کنید.



بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو ..... یک مقدار ..... است.

۱۴۵) در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی قرار دارد. اگر $OA = ۱۰$ و $MF' = ۴$. سانتی متر باشند. طول MF را تعیین کنید.

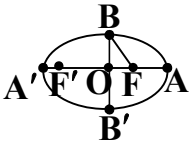


۱۴۶) در شکل مقابل دو نقطه‌ی M و N روی بیضی قرار دارند. اگر $MF' + MF = ۱۲$ و $NF = ۸$ واحد طول باشد. اندازه‌ی NF' را بیابید.

۱۴۷) ثابت کنید در هر بیضی همواره داریم : $a^۲ = b^۲ + c^۲$

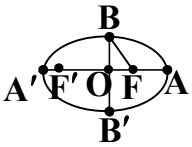
۱۴۸) در یک بیضی قطر بزرگ ۳۰ و قطر کوچک آن ۱۸ واحد است فاصله کانونی این بیضی چقدر است؟

۱۴۹) در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی قرار دارد. اگر $OB = ۵$ و $FA = ۱$ واحد طول باشند.



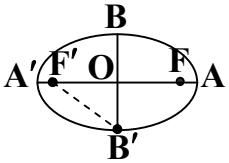
الف) حاصل $MF' + MF$ را بیابید. ب) حاصل $\frac{OF}{OA}$ را به دست آورید.

۱۵۰) در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی قرار دارد. اگر $OB = ۸$ و $FA = ۲$ واحد طول باشند.



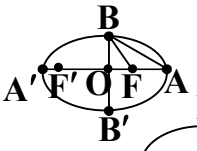
الف) حاصل $MF' + MF$ را بیابید. ب) حاصل $\frac{OF}{OA}$ را به دست آورید.

۱۵۱) در بیضی مقابل $B'F' = ۱۵$ و $AF = ۳$

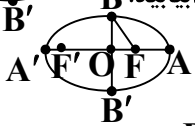


دراین صورت طول قطر کوچک بیضی چقدر است.

۱۵۲)درشکل مقابل $OB = ۳\sqrt{۲}$ واندازه زاویه OAB برابر ۳۰درجه است.طول پاره خط های BF و OF رابیابید.

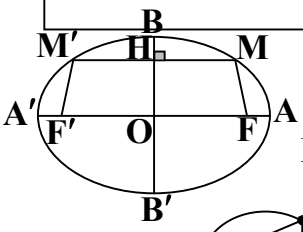


۱۵۳) در شکل مقابل $BF = ۱۳$ و $AF = ۱$ سانتی متر است. اندازه های OB و OF را تعیین کنید.

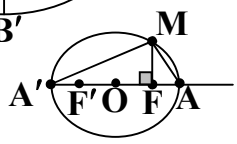


۱۵۴) در شکل مقابل نقاط M و M' روی بیضی چنان قرار دارند که $MH = M'H$ و MM' بر BB' عمود است. ثابت کنید

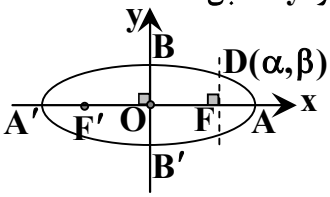
ذوزنقه‌ی $MM'F'F$ متساوی الساقین است.



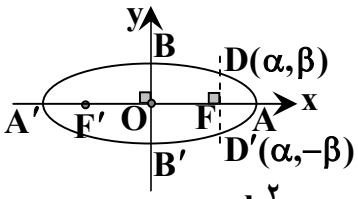
۱۵۵) در شکل مقابل از کانون F عمود MF بر $A'A$ رسم شده است. اگر $\frac{AF}{OF}=\frac{1}{2}$ و $MA=\sqrt{5}$ و $MA'=\sqrt{29}$ باشد، اندازه‌ی پاره خط MF' را بیابید.



۱۵۶) **کار در کلاس :** مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند وفاصله‌ی F ازهردونقطه‌ی O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در نقطه‌ی D قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید (ص ۴۸ چاپ ۹۸)



۱۵۷)مرکزبیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر دو است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در دو نقطه‌ی D و D' قطع کرده باشد، مختصات D و D' و اندازه‌ی پاره خط $D'D$ را به دست آورید.

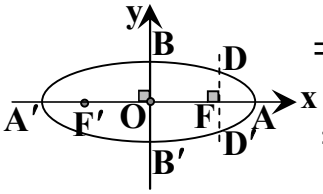


۱۵۸) مثال : طول وتری که از یک کانون بیضی (یا هذلولی) می گذرد و بر محور کانونی عمود است از رابطه $MN=\frac{2b^2}{a}$ محاسبه می شود، که در آن a و b به ترتیب نصف قطر کانونی و ناکانونی بیضی (یا هذلولی) می باشند.

اثبات : روش اول : بدون آنکه از کلیت مسأله کاسته شود فرض کنیم مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و $OF=C$ و $a=OA$ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در دو نقطه‌ی D و D' قطع کرده باشد، مختصات D و D' را به دست می آوریم.

$$F'(-c,0)\ \text{و}\ F(c,0)\ \text{و}\ A'(-a,0)\ \text{و}\ A(a,0)\ \text{و}\ D(c,-\beta)\ \text{و}\ D(c,\beta)$$

$$DF+DF'=2a\Rightarrow\sqrt{(c-c)^2+(\beta-0)^2}+\sqrt{(c+c)^2+(\beta-0)^2}=2a$$



$$\Rightarrow\sqrt{4c^2+\beta^2}=2a-\sqrt{\beta^2}\Rightarrow 4c^2+\beta^2=4a^2-4a|\beta|+\beta^2\Rightarrow a|\beta|=a^2-c^2$$

$$\Rightarrow|\beta|=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}\Rightarrow\beta=\pm\frac{b^2}{a}\Rightarrow D(c,\frac{b^2}{a})\ \text{و}\ D'(c,-\frac{b^2}{a})$$

$$DD'=\sqrt{(c-c)^2+(\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{a})}=\frac{2b^2}{a}$$

روش دوم : در بیضی داریم : $MF'^2=MF^2+F'F^2\Rightarrow MF'^2-MF^2=F'F^2$ و $MF'+MF=2a$

$$\Rightarrow(MF'-MF)(MF'+MF)=(2c)^2\Rightarrow MF'-MF=\frac{4c^2}{2a}=\frac{2c^2}{a}$$

$$\begin{cases}MF'+MF=2a\\ MF'-MF=\frac{2c^2}{a}\end{cases}\xrightarrow{-}2MF=2(a-\frac{c^2}{a})\Rightarrow MF=a-\frac{c^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow MM'=2MF=\frac{2b^2}{a}$$

۱۵۹)**فعالیت ۳ :** در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برایر a و c بیضی مورد نظر را رسم می کنیم. می دانیم که $0 \le c \le a$

و لذا $0 \le \frac{c}{a} \le 1$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی

ابتدا دو کانون F و F' را به فاصله‌ی $2c$ از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به گونه ای انتخاب کنید که

فاصله‌ی A تا F و فاصله‌ی A' تا F' برابر $a-c$ و اندازه‌ی AA' برابر $2a$ باشد، سپس با استفاده از رابطه‌ی

$b^2 = a^2 - c^2$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را بطور تقریبی رسم کنید :

۱) $c = 1$ و $a = 4$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$

۲) $c = 2$ و $a = 8$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$

۳) $c = 1$ و $a = 2$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

۴) $c = 2$ و $a = 4$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

۵) $c = 3$ و $a = 4$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$

۶) $c = 6$ و $a = 8$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$ (ص ۴۹ چاپ ۹۸)

۱۶۰) در حالتی که $\frac{c}{a} = 1$ بیضی تبدیل به یک پاره خط و در حالتی که $\frac{c}{a} = 0$ بیضی تبدیل به یک دایره می شود. چرا؟

۱۶۱) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید :

الف) مقدار $e = \frac{a}{c}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند.

ب) اگر در بیضی $\frac{c}{a} = 0$ باشد، بیضی تبدیل به خط می شود.

پ) اگر در بیضی $\frac{c}{a} = 1$ باشد، بیضی تبدیل به دایره می شود.

ت) اگر میزان کشیدگی بیضی صفر شود بیضی تبدیل به پاره خط می گردد.

۱۶۲) نقاط $F(-5,4)$ و $F'(1,4)$ کانون های یک بیضی می باشند که بر محور xها مماس است. طول قطر بزرگ این بیضی را بیابید.

۱۶۳) در یک بیضی به کانون های $F(7,3)$ و $F'(-3,3)$ اندازه‌ی قطر بزرگ ۱۰ واحد است. فاصله‌ی کانونی، مختصات مرکز بیضی

و اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید و معادله‌ی قطرهای بزرگ و کوچک بیضی آن را بنویسید.

۱۶۴) الف) مجموعه نقاطی از صفحه که مجموعه فواصل آن ها از دو نقطه ثابت $(۴,۰)$ و $(-۴,۰)$ برابر ۱۰ می باشد، چه مخروطی است؟ فاصله کانونی و خروج از مرکز این مقطع مخروطی را بیابید.

ب) نشان دهید در یک بیضی طول قطر کوچک برابر است با $BB' = ۲a\sqrt{۱-e^۲}$.

۱۶۵) در یک بیضی طول قطر بزرگ و کوچک به ترتیب ۲۰ و ۱۰ واحد است.

الف) خروج از مرکز آن را به دست آورید.

ب) از یکی از کانون های این بیضی، پاره خطی را بر محور کانونی عمود رسم می کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، طول پاره خط MN را پیدا کنید.

۱۶۶) در بیضی به کانون های F و F' (شکل مقابل) چند قطر وجود دارد که طول آن ها عدد طبیعی باشد؟

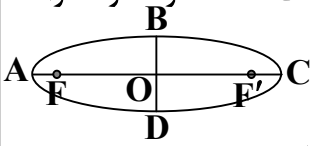
۱۶۷) بیضی به مرکز $C(-۲,۳)$ بر محورهای مختصات مماس می باشد، خروج از مرکز آن را بیابید.

۱۶۸)اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.

(۱۳۹۸/۰۳/۰۲کشوری-۱/۵نمره)

۱۶۹)اندازه‌ی قطرهای کوچک وبزرگ بیضی رابیابیدکه مرکزآن مبدأ مختصات و $F(۰,۴)$ یک کانون آن ونسبت این دوقطرآن $\frac{۳}{۵}$ باشد.

۱۷۰) خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(۴,۱)$ و طول قطر کوچک آن ۱۸ واحد می باشد. مختصات نقاط A و B و F را بنویسید. (O مرکز بیضی و BD و AC قطرهای عمودی و افقی بیضی)



۱۷۱) خروج از مرکز بیضی را بیابید که نقاط $F(۱,۵)$ و $F'(۱,-۳)$ دو کانون و $A(۱,۶)$ یک رأس آن باشد.

۱۷۲) خروج از مرکز بیضی را بیابید که نقاط $B(۱,۵)$ و $B'(۱,-۱)$ دو رأس ناکانون و $A(۶,۲)$ یک رأس کانونی آن باشد.

۱۷۳) کانون های بیضی نقاط $(۵,۱)$ و $(-۱,۱)$ بوده و مختصات یک سر قطر بزرگ آن نقطه $(۷,۱)$ است. خروج از مرکز بیضی و اندازه قطرهای آن را بیابید.

۱۷۴) نقاط F و F'، کانون های یک بیضی و M نقطه ای روی آن بیضی است. اگر $MF = ۵$، $MF' = ۱۲$ و MF بر MF' عمود باشد، خروج از مرکز این بیضی را بیابید.

۱۷۵) چند نقطه روی محورهای وجود دارد که مجموع فواصل آنها از دو نقطه $A(۵,۳)$ و $B(-۳,۳)$ برابر ۱۰ باشد.

۱۷۶) در یک بیضی طول قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک ۴ واحد است.

الف) اندازه فاصله کانونی را محاسبه کنید.

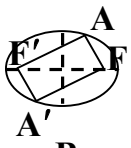
ب) خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱۷۷) اگر $F=(1,-5)$ و $F'=(-5,3)$ دو کانون یک بیضی و طول قطر کوچک آن ۲۴ باشد، خروج از مرکز آن را بیابید.

۱۷۸) اندازه‌ی قطر کوچک بیضی که نقاط $F(1,1)$ و $F'(9,-3)$ کانون های آن بوده و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{5}}{3}$ باشد.

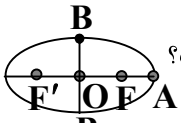
۱۷۹) خروج از مرکز بیضی افقی را بیابید که نقاط $A(7,1)$ و $B(3,-1)$ به ترتیب رأس های کانونی و ناکانونی آن باشند.

۱۸۰) اگر در بیضی شکل زیر، قطر کوچک برابر ۱۸ و خروج از مرکز $\frac{4}{5}$ باشد، محیط چهارضلعی $AFA'F'$ را بیابد.

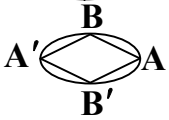


(F و F' کانون های بیضی هستند.)

۱۸۱)دربیضی شکل مقابل مساحت مثلث OAB، kبرابرمساحت مثلث FBF'است ،خروج ازمرکزبیضی چقدر است؟



۱۸۲) در شکل زیر، مساحت لوزی ۱۲۰ و طول قطر کوچک بیضی ۱۲ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

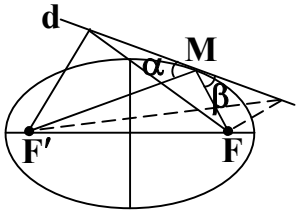


۱۸۳) هر گاه نسبت اقطار یک بیضی برابر $\frac{3}{5}$ باشد خروج از مرکز آن را بیابید.

۱۸۴) اگر فاصله کانونی یک بیضی و قطر کوچک آن را k ($k>0$) برابر کنیم خروج از مرکز بیضی جدید چند برابر می شود؟

۱۸۵) خروج از مرکز بیضی که رأس های کانونی آن $A(2,7)$ و $A'(-6,7)$ و $F(1,7)$ یک کانون آن باشد،را بیابید.

فعالیت ۴ : فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد.

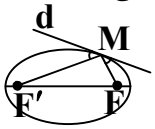


۱) مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲) دو زاویه‌ی α و β نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

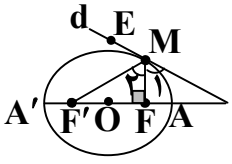
۳) با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه‌ی داخلی یک بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه‌ی نوری بر بدنه‌ی داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟ (ص ۵۰ چاپ ۹۸)

۱۸۶) در شکل خط d مماس بر بیضی به کانون های F و F' در نقطه‌ی M، امتداد محور کانونی را با چه زاویه ای قطع می کند؟



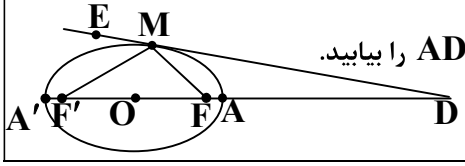
$(M\hat{F}'F=20^\circ, F'\hat{M}F=100^\circ)$

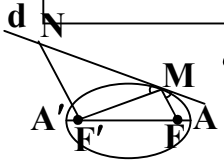
۱۸۷) در شکل مقابل، طول قطر بزرگ بیضی ۱۲ سانتی متر است. ابتدا از کانون F خطی بر $A'A$ عمود کرده تا بیضی را در نقطه‌ی M قطع کند و سپس از نقطه‌ی M خط d را مماس بر بیضی رسم می کنیم.



اگر اندازه‌ی زاویه‌ی EMF' برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی قطر کوچک بیضی را بیابید.

۱۸۸) در شکل مقابل نقطه‌ی D روی امتداد قطر بزرگ بیضی بوده و DE در نقطه‌ی M بر بیضی مماس شده است. اگر اندازه‌ی زاویه های FMD و $FF'M$ به ترتیب برابر ۳۳ و ۳۰ درجه باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی ADM را بیابید.





۱۸۹) در شکل خط d مماس بر بیضی در نقطه‌ی M، طول قطر بزرگ بیضی ۱۰ و $NF' \parallel MF$ می باشد. حاصل $NF' + 2MF + MF'$ کدام است؟

۱۹۰)خط dدرنقطه Mبربیضی به کانون های Fو F'مماس است و طول قطر بزرگ بیضی ۱۲ است. از F' خطی به موازات MF رسم می کنیم تاخط dرادرنقطه N قطع کند. اگر $MF = 2$ و فاصله F' از خط d برابر ۶ باشد. طول پاره خط MN را به دست آورید.

۱۹۱)مکان هندسی مرکز دایره هایی که بر دو دایره‌ی متداخل مفروض با مراکز متمایز O و O' و شعاع های R و R' مماس داخل باشد چیست؟

۱۹۲)اگرمجموع فاصله های نقطه Mازدونقطه ثابت $F(3,0)$و $F'(-3,0)$برابر۱۰باشد،مختصات رأس های کانونی شکل حاصل رابیابید

۱۹۳)ثابت کنید در بیضی مقابل رأس A نزدیکترین نقطه‌ی بیضی به کانون F و دورترین نقطه‌ی بیضی از کانون F' است. و به طریق مشابه نتیجه بگیرید که در بیضی مقابل رأس A' نزدیکترین نقطه‌ی بیضی به کانون F' و دورترین نقطه‌ی بیضی از کانون F است.

۱۹۴) اگر فاصله‌ی یک کانون تا نزدیکترین رأس به آن برابر ۲ باشد و فاصله‌ی کانون تا رأس ناکانونی برابر ۱۰ باشد، وتری که از کانون بیضی می گذرد و بر قطر کانونی آن عمود است، بیضی را در دو نقطه قطع می کند فاصله‌ی بین این دو نقطه را بیابید.

۱۹۵) اگر فاصله‌ی یک رأس کانونی بیضی از دو کانون آن بترتیب ۳ و ۲۷ باشند خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۹۶) طول قطر کوچک بیضی ۸ و فاصله‌ی کانون تا نزدیکترین رأس ، ۲ واحد است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۹۷) اگر طول قطر کوچک بیضی ۱۲ و فاصله‌ی یک کانون تا دورترین رأس , ۱۲ باشد. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۹۸) اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{3}{5}$ و فاصله یک رأس قطر بزرگ تا کانون نزدیکتر نسبت به این رأس، برابر ۶ باشد، طول قطر کوچک بیضی چه قدر است؟

۱۹۹) در یک بیضی، فاصله‌ی یک کانون از دورترین نقطه‌ی بیضی، پنج برابر فاصله‌ی همان کانون از نزدیکترین نقطه‌ی بیضی است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۲۰۰) در بیضی شکل مقابل، $OF = 5$ و $F'A = 11$ خروج از مرکز این بیضی را بیابید.

۲۰۱) مختصات کانون F یک بیضی با طول مثبت که بر چهار خط $x = 12$, $x = -8$, $y = -5$ و $y = 7$ مماس باشد، را بیابید.

۲۰۲) یک بیضی قائم ($F'F$ موازی محور yها است) در نقاط $(0,10)$ و $(6,0)$ بر محورهای مختصات مماس است. فاصله کانونی بیضی چقدر و خروج از مرکز آن را بیابید.